3η σελίδα σημειώσεων προηγούμενου μαθήματος(31-10-2014):

$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}, \nu \in N$

$(\alpha_\nu)_{\nu\in N}$ εν $(\mathbb{R}, | \, |)$

$(\alpha_\nu)_{\nu\in N}$ εν $((0,1), | \, |) \to$ Δεν συγκλίνει ενώ είναι βασική (*)

Ορισμός (Βασικότητας)

$(E,\rho)$ μ.χ. $(\alpha_\nu)_{\nu\in N}$ ακολ. εν E

$(\alpha_\nu)_{\nu\in N}$ βασική $\iff \left[(\forall \varepsilon>0)(\exists n)(\forall \mu,\nu \text{ εν } N)\binom{\mu>n}{\nu>n} \Longrightarrow \rho(\alpha_\mu,\alpha_\nu)<\varepsilon\right.$

Συμπεραίνουμε

Πρόταση 1

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία ενός μ.χ. είναι και βασική

(Το αντίστροφο δεν ισχύει από παράδειγμα πιο πάνω (*))

Απόδειξη

Έστω $(\alpha_\nu)_{\nu\in N}$ συγκλίνουσα ακολουθία στον μ.χ. $(E,\rho)$ κ έστω, επιπλέον, $\varepsilon>0$ (ε τυχών). Τότε $\lim\limits_{\nu\in N}\alpha_\nu = l \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (\exists n)(\forall \nu>n): \rho(\alpha_\nu, l) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ας είναι $\mu,\nu$ εν N με $\mu>n$ κ $\nu>n$

$: \rho(\alpha_\mu,\alpha_\nu) \le \rho(\alpha_\mu, l) + \rho(\alpha_\nu, l) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$(E_1,\rho_1), (E_2,\rho_2), \ldots, (E_k,\rho_k)$, $E = E_1\times\ldots\times E_k$

$$\left.\begin{array}{l}(x_1,\ldots,x_k)=x\in E\\ (y_1,\ldots,y_k)=y\in E\end{array}\right\}: \rho(x,y)=\sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1)+\cdots+\rho_k^2(x_k,y_k)}$$

$(E,\rho)$ καρτεσ. μ.χ. Έστω $(\alpha_\nu)_{\nu\in N}$ εν E

$\alpha_\nu = (\alpha_{1\nu},\ldots,\alpha_{k\nu})$

$\rho\text{-}\lim\alpha_\nu = l\in E \Longrightarrow l=(l_1,\ldots,l_k)$

Πρόταση

$$\rho\text{-}\lim\alpha_\nu = l \iff \begin{cases}\rho_1\text{-}\lim\alpha_{1\nu}=l_1\\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\\ \rho_k\text{-}\lim\alpha_{k\nu}=l_k\end{cases}$$

Απόδειξη πρότασης

($\Rightarrow$) Ισχύει $\rho_1(\alpha_{1\nu}, l_1) = \sqrt{\rho_1^2(\alpha_{1\nu}, l_1)} \leq \sqrt{\rho_1^2(\alpha_{1\nu}, l_1) + \dots + \rho_k^2(\alpha_{k\nu}, l_k)} = \rho(\alpha_\nu, l)$

$$\underline{0} \leq \rho_k(\alpha_{k\nu}, l_k) \leq \dots \leq \underline{\rho(\alpha_\nu, l)} \longrightarrow 0$$

άρα $\begin{cases} \lim_{\nu \in \mathbb{N}} \rho(\alpha_{1\nu}, L_1) = 0 \\ \lim_{\nu \in \mathbb{N}} \rho(\alpha_{k\nu}, l_k) = 0 \end{cases}$

($\Leftarrow$) $\underline{0} \leq \rho(\alpha_\nu, l) \leq \left(\rho(\alpha_{1\nu}, l_1)^{\to 0} + \dots + \rho(\alpha_{k\nu}, l_k)^{\to 0}\right) \longrightarrow \underline{\underline{0}}$

άρα $\rho(\alpha_\nu, l) \longrightarrow 0$

Αρχή σημειώσεων $\boxed{3/11}$

Πρόταση 2

Αν μία βασική ακολουθία έχει μία (τουλάχιστον) συγκλίνουσα υπακολουθία τότε είναι συγκλίνουσα

Απόδειξη

Έστω $(\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ βασική κ $(\beta_\mu)_{\mu \in M}$ υπακολουθία της $(\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, με $\lim \beta_\mu = L$. Θ.δ.ο. $\lim_{\nu \in \mathbb{N}} \alpha_\nu = L$ $(\beta_\mu = \alpha_{k_\mu}, \mu \in M)$

$\rho(\alpha_\nu, L) \leq \rho(\alpha_\nu, \beta_\mu) + \rho(\beta_\mu, L) = \rho(\alpha_\nu, \alpha_{k_\mu}) + \rho(\alpha_{k_\mu}, L)$ από $(*)$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $(\exists n_1)(\forall \mu > n_1) : \rho(\alpha_{k_\mu}, L) < \frac{\varepsilon}{2}$

$(\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ βασική άρα $(\exists n_2)(\forall \nu > n_2)(\forall \mu \in M) : \mu > n_2 \Rightarrow \rho(\alpha_\nu, \alpha_{k_\mu}) < \frac{\varepsilon}{2}$

Έστω $\nu > \max\{n_1, n_2\} = n_3$ άρα από

$(*)$: $\rho(\alpha_\nu, L) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ άρα $\lim_{\nu \in \mathbb{N}} \alpha_\nu = L$

Ορισμός 1

$(\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ φραγμένη $\Longleftrightarrow$ $(\exists M > 0) : |\alpha_\nu| < M$ για όλα τα N στον $(\mathbb{R}, |\,|)$

Ορισμός 2

$(\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ φραγμένη στον τυχόντα μ.χ. $(E, \rho)$ $\Longleftrightarrow$ $\delta(\{\alpha_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}) < +\infty$

(θυμίζουμε: $\delta(A) = \sup\{\rho(x,y) : (x,y) \in A^2\}$ και $\{\alpha_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} \subseteq E$)

Θα αποδείξουμε ότι οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι

Απόδειξη

① ⇒ ②. Έστω ισχύει το ①

$$\rho(\alpha_\nu,\alpha_\mu) = |\alpha_\nu-\alpha_\mu| \leq |\alpha_\nu| + |\alpha_\mu| < M + M = 2M \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \sup\{\rho(\alpha_\mu,\alpha_\nu) : \mu \in N \text{ και } \nu \in N\} \leq 2M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta(\{\alpha_\nu : \nu \in N\}) \leq 2M < +\infty \Rightarrow ②$$

② ⇒ ①. Έστω ισχύει το ② Δηλ. $(\exists M>0) : \delta(\{\alpha_\nu : \nu\in N\}) \leq M$

Άρα: $(\forall \mu,\nu \in N) : \rho(\alpha_\mu,\alpha_\nu) \leq M \Rightarrow (\forall \mu,\nu \in N) : |\alpha_\nu-\alpha_\mu| \leq M \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall \mu,\nu \in N) : |\alpha_\nu| - |\alpha_\mu| \leq M \Rightarrow (\forall \nu\in N) : |\alpha_\nu| - |\alpha_{\nu_0}| \leq M, \nu_0 \in N$

$\Rightarrow (\forall \nu \in N) : |\alpha_\nu| \leq M + |\alpha_{\nu_0}|, \nu_0 \in N$

$\nu_0$ σταθερό και όχι τυχόν άρα $|\alpha_{\nu_0}|$ σταθερός αριθμός, θέτω $\hat{M} = M + |\alpha_{\nu_0}| \Longrightarrow (\forall \nu \in N) : |\alpha_\nu| \leq \hat{M} \Rightarrow$ ①

Πρόταση 3

Κάθε βασική ακολουθία είναι φραγμένη

Απόδειξη

$(\exists n)(\forall \mu,\nu \in N)\binom{\mu\geq n}{\nu\geq n} \Rightarrow \rho(\alpha_\mu,\alpha_\nu) < 1$ (ισχύει $\forall \varepsilon>0$ άρα παίρνω $\varepsilon=1$)

(Για να φράξω το $\rho(\alpha_\mu,\alpha_\nu)$ παίρνω 4 περιπτώσεις):

1) $\mu \leq n$ ς $\nu \leq n$
2) $\mu \geq n$ ς $\nu \geq n$
3) $\mu \geq n$ ς $\nu \leq n$
4) $\mu \leq n$ ς $\nu \geq n$

1) $\rho(\alpha_\mu,\alpha_\nu) \leq \sup\{\rho(\alpha_\mu,\alpha_\nu) : \mu \geq n$ ς $\nu \geq n\} = M < +\infty$

ισχύει για τα $\mu \leq n$ κ $\nu \leq n$, πεπερασμένο άρα το $\sup\{\rho(\alpha_\mu,\alpha_\nu)\} < +\infty$

2) $\rho(\alpha_\mu,\alpha_\nu) < 1$

3) $(\mu \geq n$ ς $\nu \leq n)$: $\rho(\alpha_\mu,\alpha_\nu) \leq \rho(\alpha_\mu,\alpha_n) + \rho(\alpha_n,\alpha_\nu) < 1 + M$

4) $\mu \leq n$ ς $\nu \geq n$: $\rho(\alpha_\mu,\alpha_\nu) < 1+M$

$(\forall \mu,\nu\in N) : \rho(\alpha_\mu,\alpha_\nu) < 1+M \Rightarrow \delta(\{\alpha_\nu : \nu\in N\}) \leq 1+M < +\infty$

άρα τελικά το $\rho(\alpha_\mu,\alpha_\nu)$ είναι φραγμένο σε κάθε περίπτωση άρα

Πρόταση 3

$l \in \bar{A} \Leftrightarrow \underbrace{\exists (\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \text{ εν } A, \text{ με } \lim \alpha_\nu = l}_{(*)}$

Απόδειξη

$(\Rightarrow)$ Έστω $l \in \bar{A} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} B(l,\frac{1}{1})\cap A \neq \emptyset \\ \cdots \\ B(l,\frac{1}{\nu})\cap A \neq \emptyset \\ \cdots \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \exists\, \alpha_1 \in B(l,\frac{1}{1})\cap A \\ \cdots \\ \exists\, \alpha_\nu \in B(l,\frac{1}{\nu})\cap A \\ \cdots \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} (\exists\, \alpha_1 \in A) : \rho(l,\alpha_1) < \frac{1}{1} \\ \cdots \\ (\exists\, \alpha_\nu \in A) : \rho(l,\alpha_\nu) < \frac{1}{\nu} \\ \cdots \end{array}\right\} \Rightarrow \exists (\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} : 0 \leq \rho(\alpha_\nu, l) < \frac{1}{\nu}, \nu\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists (\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} : \lim_{\nu\in\mathbb{N}} \alpha_\nu = l$

$(\Leftarrow)$ Έστω ισχύει το $(*)$ κ. $U(l)$ τυχαία περιοχή του $l \xrightarrow{\lim_{\nu\in\mathbb{N}} \alpha_\nu = l}$

$(\exists n)(\forall \nu > n) : \alpha_\nu \in U(l) \xrightarrow{\alpha_\nu \in A} (\forall U(l)) : \alpha_\nu \in U(l)\cap A, \ \nu > n \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall U(l)) : U(l)\cap A \neq \emptyset \Rightarrow l \in \bar{A}$

Πρόταση 4

$A$ κλειστό $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Για κάθε ακολουθία } (\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \text{ εν } A \text{ συγκλίνουσα (εν } E) \\ \text{ισχύει } \lim_{\nu\in\mathbb{N}} \alpha_\nu \in A \end{array}\right\} - (**)$

Απόδειξη

$(\Rightarrow)$ Έστω $A$ κλειστό, δηλ. $A=\bar{A}$ κ. $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχούσα εν $A$ με $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} \alpha_\nu = l$. Θ.δ.ο. $l \in A$

Λόγω πρότασης 3: $l \in \bar{A} \xrightarrow{A=\bar{A}} l \in A$. Αποδείχθηκε.

$(\Leftarrow)$ Έστω ισχύει το $(**)$. Θ.δ.ο. $A$ κλειστό, δηλ. $\bar{A} \subseteq A$.

Έστω $x \in \bar{A} \xrightarrow{\text{προτ. 3}} \exists (\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν $A$ με $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} \alpha_\nu = x \xrightarrow{(**)} x \in A$

Εφαρμογή

$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 3x+5y=4\}$ Ν.δ.ο. το $A$ είναι κλειστό υποσύνολο του $(\mathbb{R}^2, \|\ \|)$

$(x_\nu, y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ τυχούσα ακολουθία, σημείων του $A$.

Τότε $3x_\nu + 5y_\nu = 4$, $\nu\in\mathbb{N}$

Έστω, επιπλέον, $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} (x_\nu, y_\nu) = (\alpha,\beta) \Leftrightarrow \lim_{\nu\in\mathbb{N}} x_\nu = \alpha$ κ. $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} y_\nu = \beta$

Άρα $4 = \lim(3x_\nu + 5y_\nu) = 3\lim_{\nu\in\mathbb{N}} x_\nu + 5\lim_{\nu\in\mathbb{N}} y_\nu = 3\alpha + 5\beta$

$\Rightarrow 3\alpha + 5\beta = 4 \Rightarrow (\alpha,\beta)\in A$